CAPÍTULO-1. ESPACIOS VECTORIALES

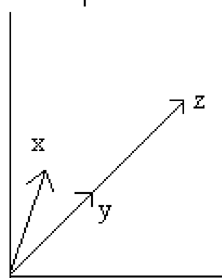
EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES

EJERCICIO 1.

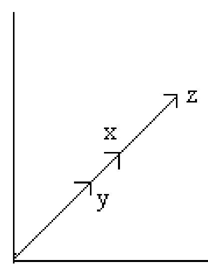
Dados los vectores $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbf{R}^3$, que son linealmente dependientes, de entre las siguientes afirmaciones, elija las correctas: a) Al menos uno es combinación lineal de los otros. b) Cualquiera de los tres es combinación lineal de los otros dos. c) El subespacio que generan $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ es de dimensión dos.

Solución:

a) Cierta. b) Falsa:



c) Falsa:



$\dim\langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\rangle = 1$.

EJERCICIO 2.

Determínese para qué valores de k los vectores $(1,-2,k),(3,0,-2),(2,-1,-5)$ forman una base de $\mathbf{R}^3$.

Solución:

Para que formen base, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & k \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & -2 & k \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = -8$. Formarán base $\forall k \in \mathbb{R} - \{-8\}$

EJERCICIO 3.

Sean L_1 el subespacio de $\mathbf{R}^3$ generado por $(1,0,0)$ y $(0,0,1)$, y L_2 el generado por $(1,1,-1)$.

a) Justifíquese porqué $L_1 \cap L_2$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$ y determínese dicho subespacio.

b) Explíquese la diferencia que hay entre $L_1 \cup L_2$ y $L_1 + L_2$

c) Descompóngase el vector (2, 5, 9) como suma de un vector de L_1 y uno de L_2 y explíquese si es posible hacerlo de más modos.

Solución:

a) Sean $\overline{u},\, \overline{v} \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow \quad \alpha\overline{u} + \beta\overline{v} \in L_1 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall \overline{u}, \overline{v} \in L_1$ y $\alpha\overline{u} + \beta\overline{v} \in L_2$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall \overline{u}, \overline{v} \in L_2 \Rightarrow \alpha\overline{u} + \beta\overline{v} \in L_1 \cap L_2 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall \overline{u}, \overline{v} \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow L_1 \cap L_2$ es subespacio.

Las ecuaciones implícitas de L_1 son: $x_2 = 0$; Las ecuaciones implícitas de L_2 son: $x_1 = x_2 = x_3$. Las ecuaciones implícitas de $L_1 \cap L_2$ son: $x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow$ El subespacio $L_1 \cap L_2$ es el subespacio $\{(0,0,0)\}$.

b) $L_1 \cup L_2$ es el conjunto de vectores que pertenecen a L_1 o a L_2, y en general no es un subespacio vectorial.

$L_1 + L_2$ es el conjunto de vectores obtenidos al sumar uno de L_1 con uno de L_2, y siempre es un subespacio vectorial.

En este caso, sean $\overline{u} = (1,0,0) \in L_1$, $\overline{v} = (1,1,1) \in L_2$, $\overline{u} + \overline{v} = (2,1,1) \notin L_1 \cup L_2 \Rightarrow L_1 \cup L_2$ no es subespacio.

c) $L_1 + L_2 = \{\alpha(1,0,0) + \beta(0,0,1) + \mu(1,1,1)\} = \{(\alpha + \mu, \mu, \beta + \mu),\ \forall \alpha, \beta, \mu \in \mathbf{R}\}$

$(2,5,9) = (\alpha + \mu, \mu, \beta + \mu) \Rightarrow 2 = \alpha + \mu, 5 = \mu, 9 = \beta + \mu \Rightarrow \alpha = -3,\ \beta = 4, \mu = 5$

$(2,5,9) = (-3,0,4) + (5,5,5);\ (-3,0,4) \in L_1,\ (5,5,5) \in L_2$.

La solución del sistema de ecuaciones anterior es única; por tanto, no se puede descomponer de otro modo el vector dado como suma de un vector de L_1 y otro de L_2. A esta misma conclusión

habríamos llegado, si hubiéramos dicho que la suma de estos dos subespacios es directa porque su intersección es $(0,0,0)$

EJERCICIO 4.

Sean E el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $(1,0,-1)$ y $(0,1,-1)$, y F por $(1,1,-2)$, $(2,1,-3)$, $(0,1,-1)$. De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas, si existen: $a)\ E \subset F\ y\ F \not\subset E;\ b)\ E \subset F\ y\ F \subset E;\ c)\ F \subset E\ y\ E \not\subset F.$

Solución:

$\{(x_1,x_2,x_3)\ /\ x_1=\alpha,\ x_2=\beta,\ x_3=-\alpha-\beta\} \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3=0$

$\langle(1,\ 1,-2),\ (2,\ 1,-3),\ (0,\ 1,-1)\rangle = \{(x_1,x_2,x_3)\ /\ x_1=\alpha+2\beta,\ x_2=\alpha+\beta+\delta,\ x_3=-2\alpha-3\beta-\delta\}$

$\Leftrightarrow\ x_1+x_2+x_3=0\ \Rightarrow E=F$, por tanto, <u>es cierta b).</u>

EJERCICIO 5.

De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas si existen. Para que el vector $(1,0,x,y)$ pertenezca al subespacio engendrado por $(1,4,5,2)$ y $(1,2,3,-1)$, los valores de x e y deben ser: a) $x=4,\ y=1$. b) $x=1,\ y=-4$. c) $x=-1,\ y=4$.

Solución:

$(1,0,x,y)=\alpha(1,4,5,2)+\beta(1,2,3,-1)\Rightarrow \alpha=-1;\beta=2;x=1;y=4$. Es válida la <u>opción b).</u>

EJERCICIO 6.

Sabiendo que $\{P(x),P'(x),P''(x),P'''(x)\}$ es una base del espacio vectorial de polinomios reales de grado ≤3 y una variable x, y siendo $P(x)=x^3+x^2+x+1$, se piden las coordenadas respecto a la base dada del polinomio $x^3+4x^2+9x+10$

Solución:

$$x^3 + 4x^2 + 9x + 10 = \alpha P(x) + \beta P'(x) + \delta P''(x) + \varepsilon P'''(x) \Rightarrow \alpha = \beta = \delta = \varepsilon = 1.$$

EJERCICIO 7.

¿Qué valores deben tener m y n para que el vector $(1,-1,m,n) \in \mathbb{R}^4$, pertenezca al subespacio vectorial generado por los vectores $\{(2,1,3,4),(1,2,-1,2),(1,-1,4,2)\}$?.

Solución:

Observemos que $(2,1,3,4)-(1,2,-1,2)=(1,-1,4,2) \Rightarrow$ El subespacio que generan los dos primeros es el mismo que el generado por los tres dados.
$(1,-1,m,n) = a(2,1,3,4)+b(1,2,-1,2) \Rightarrow$
$1 = 2a+b; -1 = a+2b; m = 3a-b; n = 4a+2b \Rightarrow a = 1; b = -1; m = 4; n = 2$

EJERCICIO 8.

Sea $A = \{(2,1,3),(-1,2,3),(0,7,7),(5,0,-5)\}$. De entre las opciones siguientes, elíjanse las correctas, si existen: a) A es base de $\mathbb{R}^3$; b) Existe una base de $\mathbb{R}^3$ que contiene al menos dos vectores de A; c) A contiene una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

a) Falsa; b) Cierta; c) Cierta

EJERCICIO 9.

Escríbase una base del espacio vectorial de polinomios de grado ≤4 con coeficientes en **R** que contenga al mayor número posible de elementos de $\wp$, siendo
$\wp = \left\{P_1 = 3 + x^4, P_2 = 5 - x - x^2, P_3 = 2x^3, P_4 = 8 - x - x^2 + 2x^3 + x^4, P_5 = 3 + 4x^3 + x^4\right\}$

Solución:

$\text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}=3$	Posible base: $\left\{3+x^4, 5-x-x^2, 2x^3, 1, x\right\}$	$\text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=5$

EJERCICIO 10.

De entre los siguientes valores de (a,b,c), elíjase la opción correcta para que el vector cuyas coordenadas en la base canónica son $(2,2,2)$, tenga las mismas coordenadas en la base $B_1 = \{(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2)\}$ que en la base $B_2 = \{(1,1,0),(0,1,1),(a,b,c)\}$: a) $(-1,0,-1)$. b) $(1,0,1)$. c) $(1,1,1)$.

Solución:

El vector $(2,2,2)$ en la base B_1 tiene como coordenadas $(1,1,1)$, para que en la base B_2 tenga las mismas coordenadas ha de cumplirse que $(2,2,2) = 1(1,1,0) + 1(0,1,1) + 1(a,b,c)$. Si se resuelve el sistema que resulta al igualar componente a componente se obtiene: $(a,b,c) = (1,0,1)$. Luego es cierta la opción b.

EJERCICIO 11.

De entre las opciones siguientes, elíjase la verdadera, las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes: a) si $x = 1$, $y = 5$. b) si $x = 5$ e $y = 16$. c) Nunca son linealmente dependientes.

Solución:

Para que sean linealmente dependientes se tiene que cumplir que: $\exists \alpha, \beta$ con $\alpha \neq 0$ ó $\beta \neq 0$, tal que $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x & y \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha + 2\beta = 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \alpha = -2 \\ \beta = 5 \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 5 \\ y = 16 \end{matrix} \right. \Rightarrow$ a) y c) son falsas y <u>b) es Verdadera.</u>

<u>EJERCICIO 12.</u>

En el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbf{R}$, de entre las opciones siguientes, elíjase la verdadera: a) El $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ depende linealmente de $\operatorname{sen}(x), \cos(x)$. b) Los vectores $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$, $\operatorname{sen}(x), \cos(x)$ son linealmente independientes. c) Los vectores $\operatorname{sen}(x), \cos(x)$ son linealmente dependientes.

<u>Solución:</u>

Como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x$ resulta que existe una combinación lineal de coeficientes no nulos, $\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Por tanto, la opción <u>correcta es a).</u>

CAPÍTULO-2 APLICACIONES LINEALES

EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES

EJERCICIO 1.

Escríbase la imagen de $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ mediante la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}$ tal que

$$f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ f(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix},\ f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$; si f es aplicación lineal $\Rightarrow$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 f(1,0,0) + x_2 f(0,1,0) + x_3 f(0,0,1) = x_1 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + 2x_3 & x_1 - x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 & 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2.

En $\mathbf{R}^3$, el vector $\overline{x} = 6\overline{e}_1 + 5\overline{e}_2 + 7\overline{e}_3$, tiene por componentes (2, 3, 4) respecto a la base $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$. Sabiendo que $\overline{v}_1 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2$, $\overline{v}_2 = \overline{e}_2 + \overline{e}_3$, calcúlese $\overline{v}_3$ en función de la base $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$.

Solución:

$6\overline{e}_1 + 5\overline{e}_2 + 7\overline{e}_3 = 2(\overline{e}_1 + \overline{e}_2) + 3(\overline{e}_2 + \overline{e}_3\ ) + 4(x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3) \Rightarrow$

$6 = 2 + 4x; 5 = 5 + 4y; 7 = 3 + 4z \Rightarrow x = 1; y = 0; z = 1$

También se podía haber hecho utilizando la fórmula del cambio de base: $X_U = U'_U X_{U'} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 3.

Determínese una base del núcleo de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, tal que $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 + x_3 - x_4)$.

Solución:

El núcleo estará formado por los pares que cumplan : $(x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 + x_3 - x_4) = (0,0)$

Es un sistema de 2 ecuaciones independientes y dos parámetros $\Rightarrow$ $x_1 = -x_3 + x_4;\ \ x_2 = \ 2x_3 - x_4$

Es un subespacio de $\mathbf{R}^4$ de dimensión 2; una base puede ser $\{(-1,2,1,0),(1,-1,0,1)\}$.

EJERCICIO 4.

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal $f(x, y, z) = (x, y, 0)$. De las siguientes opciones elíjanse las correctas, si existen: a) El núcleo es $\{(0,\ 0,\ 0)\}$. b) El núcleo es el eje z. c) El núcleo es el plano que contiene los ejes x, y.

Solución:

El núcleo es el eje z; $f(0,0,c) = (0,0,0),\ \forall c \in \mathbb{R}$

EJERCICIO 5.

En $\mathbf{R}^3$ se consideran las bases $B=\{(1,0,1),\ (0,1,1),\ (0,0,2)\}$, $B'=\{(1,1,2),\ (1,0,1),\ (0,1,2)\}$. Se pide: a) Obtener las coordenadas de los vectores de B' respecto a B y explicar qué significa cambiar un vector de base. b) Escribir las ecuaciones que permiten pasar de las coordenadas de un vector (x',y',z') respecto a B' a las coordenadas (x,y,z) del mismo vector respecto a B. c) Calcular las coordenadas respecto a B', del vector que respecto a B es $(2,\ 3/2,\ 1/4)$.

Solución:

a)

$$(1,1,2)=x_1'(1,0,1)+y_1'(0,1,1)+z_1'(0,0,2)\Rightarrow x_1'=1, y_1'=1, z_1'=0$$

$$(1,0,1)=x_2'(1,0,1)+y_2'(0,1,1)+z_2'(0,0,2)\Rightarrow x_2'=1, y_2'=0, z_2'=0$$

$$(0,1,2)=x_3'(1,0,1)+y_3'(0,1,1)+z_3'(0,0,2)\Rightarrow x_3'=0, y_3'=1, z_3'=1/2$$

b) Ecuaciones del cambio de base

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 6.

Se define una aplicación lineal $f:\square^3\to\square^4$, tal que, $f(\overline{e}_1-\overline{e}_3)=\overline{u}_1$; $f(\overline{e}_2-\overline{e}_3)=\overline{u}_1-\overline{u}_2$; $f(2\overline{e}_3)=2\overline{u}_1+2\overline{u}_3$. Determínense a) Las coordenadas de $f(\overline{e}_1)$, $f(\overline{e}_2)$, $f(\overline{e}_3)$ respecto a la base de $\mathbf{R}^4$, $B'=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3,\overline{u}_4\}$, sabiendo que $B=\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}$ es una base de $\mathbf{R}^3$. b) Ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio *Imagen de* f. c) Determínese el subespacio *núcleo* de f.

Solución:

a) y b)

$f(\overline{e}_1-\overline{e}_3)=f(\overline{e}_1)-f(\overline{e}_3)=\overline{u}_1$; $f(\overline{e}_2-\overline{e}_3)=f(\overline{e}_2)-f(\overline{e}_3)=\overline{u}_1-\overline{u}_2$; $f(2\overline{e}_3)=2f(\overline{e}_3)=2\overline{u}_1+2\overline{u}_3 \Rightarrow$

$f(\overline{e}_1)=2\overline{u}_1+\overline{u}_3=(2,0,1,0)$; $f(\overline{e}_2)=2\overline{u}_1-\overline{u}_2+2\overline{u}_3=(2,-1,1,0)$; $f(\overline{e}_3)=\overline{u}_1+\overline{u}_3=(1,01,0)$

Im*(f)*= $\left\{(y_1,y_2,y_3,y_4),\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\0&-1&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right\}$, para que el sistema generado tenga solución, $\text{rg}\begin{pmatrix}2&2&1\\0&-1&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix}2&2&1&y_1\\0&-1&0&y_2\\1&1&1&y_3\\0&0&0&y_4\end{pmatrix}\Rightarrow$ *y₄=0*. Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases}y_1=2\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3\\ y_2=-\lambda_2\\ y_3=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\ y_4=0\end{cases}$

c) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\0&-1&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ es un sistema lineal homogéneo cuya única solución es $(0,0,0)$ porque $\text{rg}(A)=\text{rg}(A\,|\,b)=3$.

EJERCICIO 7.

Se define la aplicación $f:\wp_2\rightarrow\wp_2$, tal que, $f(a+bx+cx^2)=(a+bx+cx^2)+(c+bx+ax^2)$. a) Defínase aplicación lineal y demuéstrese que f lo es. b) Explíquese qué es la matriz de una aplicación lineal y determínese la de esta aplicación al tomar $B=\{1,\ x,\ x^2\}$ como base de $\wp_2$. c) Explíquese qué es núcleo de una aplicación lineal y determínese el de esta aplicación. ($\wp_2$ es el espacio vectorial de polinomios de grado ≤2).

Solución:

La respuesta a las cuestiones teóricas se puede repasar en el capítulo correspondiente.

a) $f(\alpha(a_1+b_1x+c_1x^2)+\ \beta(a_2+b_2x+c_2x^2))=(\alpha a_1+\alpha c_1)+2\alpha b_1x+(\alpha a_1+\alpha c_1)x^2+$
$+(\beta a_2+\beta c_2)+2\beta b_2x+(\beta a_2+\beta c_2)x^2=\alpha f(a_1+b_1x+c_1x^2)+\beta f(a_2+b_2x+c_2x^2)$

b) $\left.\begin{array}{l} f(1)=\ 1+\ x^2 \\ f(x)=\ 2x \\ f(x^2)=\ 1+\ x^2 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de la aplicación.

c) Nuc $f(x)=\left\{\ a+bx+cx^2 \mid (a+bx+cx^2)+(c+bx+ax^2)=0\right\}\Rightarrow b=0,\ a+c=0$

EJERCICIO 8.

Dado el espacio vectorial de funciones $F=\left\{f(x):\mathbf{R}\to\mathbf{R}\,/\,f(x)=a\operatorname{sen}x+b\cos x\right\}$. Escríbase la matriz asociada a la base $\left\{\operatorname{sen}x,\cos x\right\}$ del endomorfismo de F definido por el cálculo de la derivada primera.

Solución:

$\left\{\begin{array}{l} (0,1)=0\operatorname{sen}\ x+1\cos\ x \\ (1,0)=1\operatorname{sen}\ x+\ 0\cos\ x \end{array}\right.$ forman la base; mediante la derivación:

$$\left\{\begin{array}{l} (0,1)=0\operatorname{sen}\ x+1\cos\ x\to(-1,0)=-1\operatorname{sen}\ x+\ 0\cos\ x \\ (1,0)=1\operatorname{sen}\ x+\ 0\cos\ x\to(0,1)=0\operatorname{sen}\ x+1\cos\ x \end{array}\right.$$

La matriz pedida es: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 9.

$f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal tal que $f(1,0,0,0)=(1,\text{-}1,2)$; $f(0,1,0,0)=(2,1,1)$; $f(0,0,1,0)=(4,\text{-}1,5)$; $f(0,0,0,1)=(\text{-}1,\text{-}5,4)$. Determínese una base del núcleo.

<u>Solución:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}=2 \Rightarrow$$ Unas ecuaciones paramétricas del núcleo son: $x_1=-2a-3b$; $x_2=-a+2b$; $x_3=a$; $x_4=b$

Una base del núcleo: $\{(\text{-}2,\text{-}1,1,0),(\text{-}3,2,0,1)\}$

$$\text{Im}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$ De estos 4 vectores, hay dos que forman base, si tomamos el 1º y el 2º, que son l.i., obtenemos las ecuaciones paramétricas de la imagen $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; eliminando los parámetros se obtienen las ecuaciones cartesianas $y_3=y_1-y_2$. Una base puede ser $\{(1,0,1),(0,1,\text{-}1)\}$, y otra $\{(1,\text{-}1,2),(2,1,\text{-}1)\}$.

<u>EJERCICIO 10.</u>

Escríbase una base del núcleo de la aplicación lineal $f:M_{2x2}\to\mathbb{R}^2 \mid f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(a+d,0)$.

Solución:

$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (0,0) \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow a = -d, \forall c, b \in \mathbf{R}$; $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base del núcleo.

CAPÍTULO-3 DETERMINANTES

EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES

EJERCICIO 1.

Siendo A, B matrices cuadradas del mismo orden, de entre las siguientes opciones, elíjanse las correctas, si existen. a) $|A+B| = |A| + |B|$. b) $|AB| = |A||B|$. c) $|A^n| = |A|^n$.

Solución:

a es falsa; b cierta y c también cierta porque es consecuencia de la respuesta b.

EJERCICIO 2.

Resuélvase la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 1$.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x-1 & x^2-1 & x^2-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \end{vmatrix} = -(x-1)\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x-1)\begin{vmatrix} 0 & x-1 & x-2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (x-1)[6(x-1)-2(x-2)] = (x-1)(4x-2) =$$

$$= (x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ 4x-2 = x-1 \Rightarrow x = 1/3 \end{cases}$$

EJERCICIO 3.

De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas si existen: a) Si la matriz AB tiene inversa, necesariamente A y B tienen inversa. b) $AB = BA$ siendo A y B matrices cuadradas reales del mismo orden. c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Solución:

a) Falsa, si $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times m} \Rightarrow AB \in M_{m\times m}$ y puede tener inversa, pero si $m \neq n$, A y B no pueden tener inversa.

b) Falsa, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Cierta, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I$.

EJERCICIO 4.

Redúzcase $\begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 \end{vmatrix}$ a producto de factores reales irreductibles en **R**.

Solución:

$$(x^2+x+5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x+x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x+x^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x+x^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x+x^2 \end{vmatrix} (x^2+x+5) = (x^2+x+5)(x^2+x)^4 =$$

$$= x^4(x+1)^4(x^2+x+5).$$

EJERCICIO 5.

Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas si existen: a) $AB = I$. b) B es la inversa de A. c) A no tiene inversa.

Solución:

a y c ciertas, b falsa. Para que una matriz A tenga inversa, hace falta que sea cuadrada y que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

EJERCICIO 6.

¿Para qué valores de x, la inversa de $\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ coincide con su opuesta?

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -x^2 + 10 = 1 \Rightarrow x = \pm 3$$

EJERCICIO 7.

Sea $|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+b \end{vmatrix}$. De entre las opciones siguientes, elíjanse las correctas, si existen: a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$. b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. c) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 8.

Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, determínese el valor de $\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix} = 4.\frac{1}{4}\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.1 = 1.$$

EJERCICIO 9.

Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, se cumple que: a) Si existe $A^{-1} \Rightarrow (A+B)A^{-1} = A^{-1}(A+B)$. b) Si existe $A^{-1} \Rightarrow (A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$. c) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

Solución:

a) Falsa. $(A+B)A^{-1} = I + BA^{-1} \neq A^{-1}(A+B) = I + A^{-1}B$ (el producto de matrices no es conmutativo).

b) Cierta

$$\left(A+B\right)A^{-1}\left(A-B\right)=\left(A+B\right)\left(I-A^{-1}B\right)=A-B+B-BA^{-1}B=A-BA^{-1}B=\left(A-B\right)A^{-1}\left(A+B\right)$$

c) Falsa. Basta considerar las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

para tener un contraejemplo, en los apartados a y c.

CAPÍTULO-4 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES

EJERCICIO 1.

Los planos $P: ax + y + z = a; Q: x + y + az = b; R: x + ay + z = b$ pertenecen al mismo haz (se cortan en una recta r). Calcúlense los valores de a y b o la relación que debe existir entre ellos para que eso sea posible.

Solución:

Para que formen un haz, el sistema que forman sus ecuaciones debe ser compatible indeterminado $\Leftrightarrow \text{rg}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & b \\ 1 & a & 1 & b \end{array}\right) = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} a = -2 \\ \quad o \\ a = 1 \end{cases}$. Si $a = -2$, y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & b \\ -2 & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b = 1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 2$ y pertenecen al mismo haz los tres planos. Si $a = -1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$.

EJERCICIO 2.

Determínese el valor de a, si existe, para que la recta $\begin{cases} x + ay + z = -2 \\ 4x + 2y + az = -1 \end{cases}$ tenga por vector director unitario $\left(1/\sqrt{6},\, 1/\sqrt{6},\, 2/\sqrt{6}\right)$.

Solución:

El vector director de la recta dada es $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 2 & a \end{vmatrix} = \left(a^2-2, 4-a, 2-4a\right)$ y proporcional al vector director unitario $\Rightarrow (a^2-2, 4-a, 2-4a) = (t, t, 2t) \Rightarrow\ a=-3,\ t=\ 7$.

EJERCICIO 3.

Dado el sistema $2x+ay=1;\ 2x-y=0;\ ax+by=-1$, se pide elegir, de entre las siguientes afirmaciones, las que hacen que el sistema sea compatible determinado: a) $a=-1,\ b\neq 1/2$. b) $a\neq -1,\ 3a+2b+2=0$. c) $a\neq -1,\ 3a+2b+2\neq 0$.

Solución:

a) $a=-1,\ b\neq 1/2$, $\mathrm{rg}(A)\neq \mathrm{rg}(A\ ampl) \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) $a\neq -1,\ 3a+2b+2=0$, $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(A\ ampl)=2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

c) $a\neq -1,\ 3a+2b+2\neq 0$, $\mathrm{rg}(A)\neq \mathrm{rg}(A\ ampl) \Rightarrow$ Sistema incompatible.

EJERCICIO 4.

Dado el sistema $2x+3y-z=0; 3x+ay-z=0; -x-6y+z=a$, se pide elegir, de entre las siguientes afirmaciones, las que hacen que el sistema sea compatible determinado: a) Cualquier valor de a. b) $a\neq 0$. c) $a=0$.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & a & -1 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = a;$$

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} \text{rg}(A/b) = 3, \ Si \ \ a \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \\ \text{rg}(A/b) < 3, \ Si \ \ a = 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado} \end{cases}$$

EJERCICIO 5.

Dadas las rectas: $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{5}$; $s: \dfrac{x-3}{2} = y = \dfrac{z-1}{3}$. De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas si existen. a) Son paralelas. b) Se cortan. c) Se cruzan.

Solución:

$\overline{r} = (2,4,5)$, $P_r = (1,3,0)$,$\overline{s} = (2,1,3)$, $P_S = (3,0,1)$, $\overline{P_r P_S} = (2,\text{-}3,1)$. a) No son paralelas, $\overline{r}$ y $\overline{s}$ no son proporcionales.

b) No se cortan porque $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

c) Se cruzan.

EJERCICIO 6.

Dado el sistema lineal: $\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3a \end{cases}$, de entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas, si existen: a) El sistema es siempre compatible. b) Si $a = 2$, el sistema es incompatible. c) Si $a \neq 2$, el sistema es incompatible.

Solución:

$$\text{rg}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3,\ \forall a \in \mathbf{R};$$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{pmatrix} = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad a \neq 2,\ \text{Sistema} \quad \text{incompatible} \\ 3 & \text{si} \quad a = 2,\ \text{Sistema} \quad \text{compatible} \quad \text{determinado} \end{cases}$$

EJERCICIO 7.

Dadas las rectas $r: x+y=1$; $s: 2x+3y=1$; $t: 3x+\alpha y=2$. Calcúlense los valores de α para que las tres rectas formen triángulo.

Solución:

$\text{rg}(M)=2$; $\text{rg}(A|B)=\begin{cases} 3 & si \quad \alpha \neq 4 \\ 2 & si \quad \alpha = 4 \end{cases}$. Para $\alpha = 3$, r y t son paralelas. Para $\alpha = 9/2$, s y t son paralelas. Para $\alpha \neq 4, \alpha \neq 3, \alpha \neq 9/2$ se cortan dos a dos.

EJERCICIO 8.

Sean los planos $x - y + 3z = 1$; $3x - 5y + 7z + \beta = 0$; $x - 3y + \alpha z = 2$. Determínese el valor de α y β para que los tres planos formen un triedro.

Solución:

	$\alpha \neq 1;\ \forall\beta$	$\alpha = 1;\ \beta \neq -4$	$\alpha = 1;\ \beta = -4$	Triedro (Se cortan en un punto)
$\text{rg}(M)$	3	2	2	Se cortan dos a dos
$\text{rg}(M \mid B)$	3	3	2	Se cortan a lo largo de una recta

EJERCICIO 9

Dada la recta $r: \begin{cases} 5x - y - 2z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$, de entre las opciones siguientes, elíjanse las correctas, si existen: a) La recta r es paralela al plano $3x - y + 8z = 0$. b) r contiene el vector de extremos $(0,0,0),(3,-1,8)$. c) Cualquier vector de r es paralelo a $(3,\text{-}1,8)$.

Solución:

r en paramétricas:	Vector perpendicular al plano: $(3,\text{-}1,8)$
$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda/3 \\ z = -1 + 8\lambda/3 \end{cases}$ $\overline{d}_r = (1, -1/3, 8/3)$	a) Falsa, r es perpendicular al plano, no paralela. b) Falsa, r no pasa por $(0,0,0)$ ni por $(3,\text{-}1,8)$ c) Cierta, $\overline{d}_r = (1, -1/3, 8/3)$ es el vector director de r

EJERCICIO 10.

Dado el sistema $2x + 3y - z = 2;\ bx + ay + 2z = 0;\ 5x + 5y + z = 0$. Entonces: a) Si $a = 2$ y $b \neq 3$, el sistema es compatible indeterminado. b) Si $b = 3$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado. c) Si $a = 2$ y $b = 5$ es incompatible.

Solución:

a) Es falsa, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ b & a & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 7a - 8b + 10$. Por tanto, si $a = 2$ y $b \neq 3 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A|B) = 3 \Rightarrow$ el sistema es incompatible. La opción b) es cierta, ya que, si $b = 3$ y $a \neq 2 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 3$, y es sistema compatible. c) Es falsa, ya que, sería sistema compatible determinado.

EJERCICIO 11.

De entre las opciones siguientes elíjase la correcta. El plano $\pi \equiv 2x + y - z = 0$ contiene a la recta: a) $x = 1 + 2t$, $y = t$, $z = 2 - t$. b) $x = 1 + t$, $y = -2 - 2t$, $z = 0$. c) No contiene a ninguna de las anteriores.

Solución:

El plano π tiene como vector director $(2,1,-1)$ y contiene a los vectores, $(1,-2,0)$, $(0,1,1)$. a) Falsa, porque el vector paralelo de la recta es perpendicular al plano. b) Verdadera, porque el punto $(1,-2,0) \in \pi$ y el vector director de la recta es $(1,-2,0)$. c) Falsa como consecuencia de las anteriores.

EJERCICIO 12.

Dado el sistema $2x + ay = 1; 2x - y = 0; ax + by = -1$, se pide elegir de entre las siguientes condiciones, la que hace que sea compatible determinado: a) $a = -1$, $b \neq 1/2$. b) $a \neq -1, 3a + 2b + 2 = 0$. c) $a \neq -1, 3a + 2b + 2 \neq 0$.

Solución:

a) Falsa: $a = -1, b \neq 1/2$, rg(A) $\neq$ rg(A|ampl) $\Rightarrow$ Sistema incompatible.
b) Cierta: $a \neq -1, 3a + 2b + 2 = 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid amp) = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
c) Falsa. $a \neq -1, 3a + 2b + 2 = 0$, rg(A) $\neq$ rg(A|ampl) $\Rightarrow$ Sistema incompatible.

CAPÍTULO-5 PRODUCTO ESCALAR

EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES

EJERCICIO 1.

Los puntos (2,6),(2,2), y (5,3) son tres vértices de un paralelogramo. Calcúlese la norma de sus diagonales (utilizando el producto escalar estándar en $\mathbf{R}^2$).

Solución:

Las diagonales de un paralelogramo de lados los vectores libres: $\overline{u}=((5,3)-(2,2))=(3,1)$ y $\overline{v}=((2,6)-(2,2))=(0,4)$, son: $\overline{u}+\overline{v}=(3,1)+(0,4)=(3,5)$ y $\overline{u}-\overline{v}=(3,1)-(0,4)=(3,-3)$.

Las normas pedidas son: $\|(3,5)\|=\sqrt{(3,5)\cdot(3,5)}=\sqrt{34}$ y $\|(3,-3)\|=\sqrt{(3,-3)\cdot(3,-3)}=\sqrt{18}$

EJERCICIO 2.

Se considera el espacio vectorial de los polinomios y el producto escalar $P_1(x)\cdot P_2(x)=\int_0^1 P_1(x)\cdot P_2(x)dx$. Determínese la norma de $P_1(x)=mx+1$ sabiendo que es ortogonal al polinomio $P_2(x)=x^2$.

Solución:

$$\int_0^1 (mx+1)x^2dx=\frac{m}{4}+\frac{1}{3}=0\Rightarrow m=-\frac{4}{3};\ \int_0^1 (-\frac{4}{3}x+1)(-\frac{4}{3}x+1)dx=\frac{7}{27}\Rightarrow\sqrt{\frac{7}{27}}$$

EJERCICIO 3.

Sean $\overline{x}=(x_1,x_2),\overline{y}=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$. De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse dos que sean correctas, si existen: La aplicación $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f\left(\overline{x},\overline{y}\right)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda^2 & 4\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$ no es producto escalar: a) si $\lambda=0$. b) si $\lambda=1$. c) si $\lambda=-1$.

Solución:

Una de las condiciones para que sea producto escalar es: $\overline{x}\cdot\overline{y}=\overline{y}\cdot\overline{x}\Rightarrow$ son valores posibles $\lambda=1,\ \lambda=-1\ \Rightarrow$ a) si $\lambda=0$, no se cumple $\overline{x}\cdot\overline{y}=\overline{y}\cdot\overline{x}$. b) para $\lambda=1$ sí es producto escalar. (Es fácil comprobar el resto de las propiedades). c) para $\lambda=-1$, puede no cumplirse $\overline{x}\cdot\overline{x}>0$.

EJERCICIO 4.

En $\mathbf{R}^3$ se define el producto escalar $\overline{x}\cdot\overline{y}=\overline{x}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\overline{y}^t$. De entre las opciones siguientes, elíjanse las verdaderas si existen: la norma de $(1,2,1)$ es: a) $\sqrt{14}$. b) 6. c) $\sqrt{6}$.

Solución:

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=14$, es válida la opción a.

EJERCICIO 5.

Sea V el espacio vectorial de polinomios reales de grado menor que dos, con una indeterminada x. Considérese en V el producto escalar $p(x) * q(x) = \int_{-1}^{1} p(x)\cdot q(x)dx$.

De entre las opciones siguientes, elíjanse las correctas, si existen. El vector $2x-3$ es ortogonal a: a) $3x+2$. b) $9x+2$. c) $2x+3$.

Solución:

a) $\int_{-1}^{1}(2x-3)(3x+2)dx \neq 0$. b) $\int_{-1}^{1}(2x-3)(9x+2)dx = 0$. c) $\int_{-1}^{1}(2x-3)(2x+3)dx \neq 0$. Sólo son ortogonales $2x-3$ y $9x+2$.

EJERCICIO 6.

Sea V el espacio vectorial de polinomios reales de grado menor que tres, con una indeterminada x y $\{1, x, x^2\}$ una base de V. Considérese en V el producto escalar $p(x) * q(x) = \int_{-1}^{1} p(x)\cdot q(x)dx$: a) Determínese la matriz que define este producto escalar. b) ¿Es ortonormada la base dada (con la norma dada)?. c) Escríbase la norma de x^2-1.

Solución:

$\int_{-1}^{1}(1)(1)dx = 2$;	$\int_{-1}^{1}(x)(x)dx = 2/3$;	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$
$\int_{-1}^{1}(x^2)(x^2)dx = 2/5$;	$\int_{-1}^{1}(1)(x)dx = 0$;	
$\int_{-1}^{1}(1)(x^2)dx = 2/3$;	$\int_{-1}^{1}(x)(x^2)dx = 0$;	

b) No lo es porque la matriz de su producto escalar no es $I \Leftrightarrow$ La norma de sus vectores no es 1.

c) $\int_{-1}^{1}(x^2-1)(x^2-1)dx = 16/15$; $\|x^2-1\| = \sqrt{16/15}$

CAPÍTULO-6. DIAGONALIZACIÓN

EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES

EJERCICIO 1.

a) Una matriz M, tiene por filas: $(0,1,-1),(1,2,-1),(-1,-1,2)$. Dígase si es diagonalizable, y si lo es, defínase el tipo de matrices que la diagonalizan.
b) Dada la matriz A, cuyas filas son: $(1,0,0),(0,\cos x,\operatorname{sen} x)$, $(0,-\operatorname{sen} x,\cos x)$ aplíquese la definición dada en el apartado a) para comprobar si esta matriz es ortogonal o no.
c) Determínese si la matriz A, dada en el apartado b), diagonaliza a la matriz M, dada en el apartado a), para algún valor de x y si es posible, determínese dicho valor.

Solución:

a) Una matriz M, simétrica, es diagonalizable mediante una matriz A ortogonal; A es ortogonal $\Leftrightarrow$ Sus columnas forman un sistema ortonormal de vectores $\Leftrightarrow$ $A^t = A^{-1}$.
b) Con cualquiera de las dos definiciones es evidente que la matriz dada es ortogonal.
c) La matriz producto $A^{-1}MA$ es la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cos x+\operatorname{sen} x & \operatorname{sen} x-\cos x \\ \cos x+\operatorname{sen} x & 2\operatorname{sen} x\cos x+2 & 1-2\cos^2 x \\ -\cos x+\operatorname{sen} x & 1-2\cos^2 x & 2-2\operatorname{sen} x\cos x \end{pmatrix}$$

para que sea diagonal, $\cos x+\operatorname{sen} x=-\cos x+\operatorname{sen} x=1-2\cos^2 x=0$, como no hay valor de x que haga compatibles las 3 condiciones $\Rightarrow$ No hay ningún valor de x que haga que la matriz A diagonalice M.

EJERCICIO 2.

Determínese para que valores de a es diagonalizable la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$=0 $\Rightarrow \lambda = 1$ es raíz doble, y $\lambda = 2$ es raíz simple. El subespacio asociado a $\lambda = 1$ tiene por ecuaciones: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow ax_1 = 0$;

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ si $a \neq 0$ la dimensión del subespacio es 1, si $a = 0$, la dimensión del subespacio es 2; para que se pueda diagonalizar a debe ser igual a 0.

EJERCICIO 3.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Determínese si $(1,0,1)$ es vector propio de A, y si lo es, ¿a qué valor propio corresponde?.

Solución:

Sí lo es porque $\exists\lambda$ tal que .$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda = 2$.

EJERCICIO 4.

¿Qué valores puede tener x para que $P(\lambda) =$ λ^3 $-3\lambda^2$ $x + \lambda$, pueda ser el polinomio característico de una matriz simétrica?

Solución:

A es simétrica $\Rightarrow$ sus autovalores son reales; $\lambda^3 - 3\lambda^2 x + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 3\lambda x + \lambda) = 0$ debe tener raíces reales $\Rightarrow 9x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 2/3$.

EJERCICIO 5.

De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas si existen: La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable: a) Si $a \neq 0$. b) Si $a = 0$. c) No es diagonalizable para ningún valor real de a.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ es raíz doble, } \lambda_2 = 2 \text{ simple;}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}; \begin{cases} Si \quad a = 0, \ \dim(L_1) = 2 \\ Si \quad a \neq 0, \ \dim(L_1) = 1 \end{cases}$; La matriz sólo será diagonalizable si $a = 0$. Es cierta b.

EJERCICIO 6.

a) Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Escríbanse las condiciones que deberían cumplirse para que A y B fueran semejantes. b) Si las matrices A y B del apartado a) son semejantes, escríbase la matriz de paso, y si no lo son, dígase porqué. c) ¿Es diagonalizable la matriz B?. Justifíquese la respuesta.

Solución:

a) Debería existir una matriz P, regular, tal que $A = PBP^{-1}$.

b) Si son semejantes, $\exists P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, que verifica $AP = PB$. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2a = a + b;\ 2b = a; -c = c + d; -d = c \Rightarrow a = b = c = d = 0$ y la matriz P no sería regular$\Rightarrow$ No son semejantes.

c) Los autovalores de B son las soluciones de la ecuación $\begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ son dos autovalores reales y distintos de una matriz de orden dos$\Rightarrow$ la matriz es diagonalizable.

EJERCICIO 7.

A es la matriz de una aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$. De entre las opciones siguientes, elíjanse las correctas, si existen: a) El $\overline{0}$ es autovector de A. b) Si A tiene 3 autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \Rightarrow |A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. c) Si A es simétrica$\Rightarrow$ Existe una matriz diagonal semejante.

Solución:

a) Falsa por definición. b) Correcta, si A y B son semejantes$\Rightarrow |A| = |B|$. c) Correcta, las matrices simétricas son siempre diagonalizables.

EJERCICIO 8.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, el subespacio de los vectores propios de valor propio 6, asociado a la matriz es: a) $x - 2y + z = 0$. b) $(2,1,0)$ y $(-1,0,1)$. c) No tiene porque no es diagonalizable.

Solución:

La solución es a)

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 10-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (7-\lambda)^2(10-\lambda)+8-(10-\lambda)-8(7-\lambda)) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 6, \lambda = 6, \lambda = 12$

Calculemos el subespacio de los vectores de valor propio 6;

$\begin{pmatrix} 7-6 & -2 & 1 \\ -2 & 10-6 & -2 \\ 1 & -2 & 7-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ luego resulta el plano $x-2y+z=0$. La b) es falsa porque los vectores $(2,1,0)$ y $(-1,0,1)$ están en el plano pero no son todos los vectores de dicho subespacio. La c) también es falsa, porque es diagonalizable.

EJERCICIO 9.

Dada la matriz $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. De entre las siguientes afirmaciones, elíjase la correcta: el subespacio de los vectores propios asociados al autovalor 2 es: a) $\langle (1,-1,0),(0,0,1) \rangle$. b) $\langle (1,-1,0) \rangle$. c) Ninguna de las anteriores es cierta.

Solución:

La solución es a).

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-2)^2(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2, \lambda = 2, \lambda = -1$$

Calculemos el subespacio asociado al valor propio 2:

$$\begin{pmatrix} -4-2 & -6 & 0 \\ 3 & 5-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$ plano $x+y=0$, es decir, el subespacio

$\langle (1,-1,0),(0,0,1) \rangle$.

CAPÍTULO-7. FORMAS BILINEALES. FORMAS CUADRÁTICAS.

EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES

EJERCICIO 1.

Sea V un espacio vectorial real, $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, una aplicación tal que, $f(\overline{x}, \overline{y}) = x_1 y_1 - 4x_1 y_2 + 3x_2 y_2$. a) Justifíquese si la aplicación es forma bilineal o no. b) Escríbase la expresión analítica de la forma cuadrática asociada. c) Clasifíquese la forma cuadrática obtenida.

Solución:

a) Es bilineal porque es lineal en las dos variables :

$$f(\overline{x}, \overline{y}) + f(\overline{x}', \overline{y}) = (x_1 y_1 - 4x_1 y_2 + 3x_2 y_2) + (x_1' y_1 - 4x_1' y_2 + 3x_2' y_2) = f(x + x', y) =$$
$$= (x_1 + x_1')y_1 - 4(x_1 + x_1')y_2 + 3(x_2 + x_2')y_2 = f(\overline{x} + \overline{x}', \overline{y})$$
$$f(\overline{x}, \overline{y}) + f(\overline{x}, \overline{y}') = (x_1 y_1 - 4x_1 y_2 + 3x_2 y_2) + (x_1 y_1' - 4x_1 y_2' + 3x_2 y_2') =$$
$$= x_1(y_1 + y_1') - 4x_1(y_2 + y_2') + 3x_2(y_2 + y_2') = f(\overline{x}, \overline{y} + \overline{y}')$$
$$\lambda f(\overline{x}, \overline{y}) = f(\lambda \overline{x}, \overline{y}) = f(\overline{x}, \lambda \overline{y}) = \lambda(x_1 y_1 - 4x_1 y_2 + 3x_2 y_2) = \lambda x_1 y_1 - 4\lambda x_1 y_2 + 3\lambda x_2 y_2 .$$

Es forma porque es una aplicación en **R**, que es el cuerpo sobre el que está construido *V*.

b) Forma cuadrática asociada: $Q(\overline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

c) Ecuación característica: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{5}$.

Matriz diagonal equivalente: $\begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Forma cuadrática diagonal asociada: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Como hay autovalores positivos y negativos la forma cuadrática es indefinida.

EJERCICIO 2.

Clasifíquese la forma cuadrática $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por: $q(x,y,z) =$
$= ax^2 + ay^2 + (a-1)z^2 + 2xy$ cuando $a = -1$.

Solución:

Valores propios de la matriz cuando $a = -1$.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2 \ ; \ \lambda_3 = 0$$

dim (subespacio asociado a λ_1) = 2 = multiplicidad algebraica de λ_1

dim (subespacio asociado a λ_3) = 1 = multiplicidad algebraica de λ_3

$\Rightarrow$ La matriz es diagonalizable y la matriz diagonal asociada es: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Signatura es el par (p,m) donde p es el número de elementos positivos que posee la diagonal de la matriz diagonal asociada, y m el número de elementos negativos.

Signatura $= (0,2)$ si $a = -1$.

Semidef negativa: sg$= (0,r)$ y $\text{rg} = r < n$ $\quad a = -1$; $\qquad \Rightarrow \text{sg} = (0,2)$ y $\text{rg} = 2 < 3$.

EJERCICIO 3.

Consideremos la aplicación de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida mediante: $f(\overline{v}_1, \overline{v}_2) =$
$= x_1y_1 - x_1y_2 - 3x_2y_1 + 3x_2y_2$, siendo $\overline{v}_1 = (x_1, x_2)$, $\overline{v}_2 = (y_1, y_2)$. Se pide:

a) Demostrar si es forma bilineal o no.

b) Escribir la forma cuadrática diagonal asociada y justificar que se puede hacer.

c) Clasificar esta forma cuadrática.

Solución:

a) En el enunciado nos dicen que es aplicación, veamos que es bilineal.

$f(\overline{v}_1+\overline{v}_1^{'},\overline{v}_2)=x_1y_1+x_1^{'}y_1-x_1y_2-x_1^{'}y_2-3x_2y_1-3x_2^{'}y_1+3x_2y_2+3x_2^{'}y_2=f(\overline{v}_1,\overline{v}_2)+f(v_1^{'},v_2)$

$f(\overline{v}_1,\overline{v}_2+\overline{v}_2^{'})=x_1y_1+x_1y_1^{'}-x_1y_2-x_1y_2^{'}-3x_2y_1-3x_2y_1^{'}+3x_2y_2+3x_2y_2^{'}=f(\overline{v}_1,\overline{v}_2)+f(\overline{v}_1,\overline{v}_2^{'})$

$f(\lambda\overline{v}_1,\overline{v}_2)=\lambda\overline{x}_1\overline{y}_1-\lambda\overline{x}_1\overline{y}_2-3\lambda\overline{x}_2\overline{y}_1+3\lambda\overline{x}_2\overline{y}_2=f(\overline{v}_1,\lambda\overline{v}_2)$

Es forma porque la imagen de la aplicación es $\mathbf{R}$, que es el espacio sobre el que están definidos los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$.

b) Una expresión analítica de la forma cuadrática es: $Q(x_1,x_2)=$

$=(x_1\ ,\ x_2)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, la misma forma cuadrática se obtiene si se emplea como

matriz asociada : $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, que por ser simétrica es diagonalizable.

$\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=\ 2-\sqrt{5}$; $\lambda_2=2+\sqrt{5}$;$\Rightarrow$ $(x_1',x_2')\begin{pmatrix}2-\sqrt{5} & 0\\ 0 & 2+\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix}$ es la expresión diagonal de la forma cuadrática.

c) $\lambda_1=\ 2-\sqrt{5}<0$, $\lambda_2=2+\sqrt{5}>0\Rightarrow$ es una forma cuadrática indefinida.

EJERCICIO 4.

¿A qué intervalo debe pertenecer a, para que la forma cuadrática $Q(x,y)=2x^2+axy+6y^2$ sea definida positiva?.

Solución:

Matriz de la forma cuadrática: $\begin{pmatrix} 2 & a/2 \\ a/2 & 6 \end{pmatrix}$. Autovalores: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & a/2 \\ a/2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 + \dfrac{\sqrt{a^2+16}}{2} \\ \lambda_2 = 4 - \dfrac{\sqrt{a^2+16}}{2} \end{cases}$; λ_1 es siempre positivo, para que lo sea λ_2 es necesario que

$\dfrac{\sqrt{a^2+16}}{2} < 4 \Rightarrow |a| < 4\sqrt{3}$.

CAPÍTULO-8. PROGRAMACIÓN LINEAL

EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES

EJERCICIO 1.

En un tratamiento se están utilizando dos tipos de radiaciones. Cuando se utiliza el tipo 1 la absorción de radiaciones por unidad de superficie se efectúa del siguiente modo: zona sana: 40%, órganos periféricos: 30%, zona afectada: 50%, centro del tumor: 60%, y cuando se utiliza el tipo 2, zona sana: 50%, órganos periféricos: 10%, zona afectada: 50%, centro del tumor: 40%. Escríbanse las restricciones que deben cumplir las cantidades de cada radiación, de modo que, los tejidos sanos absorban la cantidad mínima de radiación, teniendo en cuenta que, los órganos periféricos se dañarían si recibieran más de 2700 unidades, la zona afectada debe recibir 6000 unidades y el centro del tumor una cantidad al menos igual a las 6000 unidades.

Solución:

La función a minimizar es: $z = 0,4x_1 + 0,5x_2$, donde x_1 es la cantidad de radiación del 1er tipo, x_2 es la cantidad de radiación del 2° tipo y la función z está sujeta a las restricciones:

$0,3x_1 + 0,1x_2 \leq 2700;\ \ 0,5x_1 + 0,5x_2 = 6000$;

$0,6x_1 + 0,4x_2 \geq 6000 \quad x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$

EJERCICIO 2.

En el siguiente problema de programación lineal: “Calcular el $\max z = 5x_1 + 2x_2$ con las restricciones: $3x_1 + 5x_2 \leq 15$; $10x_1 + 4x_2 \leq 20$; $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$”. Convertimos las desigualdades en igualdades mediante las variables de holgura x_3, x_4. Se pide elegir las afirmaciones correctas, si existen, de entre las siguientes:

a) $(2,0,0,0)$ es una solución factible básica. b) $(3,1,2,0)$ es una solución factible básica. c) Cualquier punto que pertenezca al segmento $[(20/19,45/19),(2,0)]$, es solución óptima.

Solución:

$(2,0,0,0)$ es factible (satisface todas las restricciones) y es básico porque no tiene mas de dos componentes positivas distintas de 0.
$(3,1,2,0)$ no es factible (no satisface la segunda restricción).

Cualquier punto del segmento [(20/19,45/19),(2,0)] es solución óptima porque la función objetivo es paralela a la frontera de la región de posibilidad a que pertenece el segmento dado. Son ciertas a) y c).

EJERCICIO 3.

Un despacho de abogados está dividido en dos departamentos, en el 1º se realiza el estudio de los casos, y en el 2º se prepara la defensa. Intervienen en 2 tipos de problemas, para cada caso del 1er tipo se utilizan 2 horas del 1er departamento y 5 del 2º y para los del 2º tipo se emplean 4 h del 1er departamento y 2 del 2º. Sabiendo que cada caso del 1er tipo deja 150000 euros de beneficios y cada uno del 2º, 300000 euros, se desea conocer cuántos casos de clase hay que resolver en una semana para rentabilizar al máximo los beneficios, teniendo en cuenta que el despacho sólo permanece abierto un máximo de 40 horas semanales. Se pide escribir la función objetivo y las restricciones.

Solución:

	tipo1	tipo 2	
número de casos	x_1	x_2	
tiempo departamento 1	$2x_1$	$4x_2$	$2x_1+4x_2 \le 40$ $x_1, x_2 \ge 0$
tiempo departamento 2	$5x_1$	$2x_2$	$5x_1+2x_2 \le 40$

ganancia.	$150000x_1$	$300000x_2$	$z = 150000x_1 + 300000x_2$

EJERCICIO 4.

Determínese el valor mínimo de la función $z = 20x_1 + 30x_2$ y los valores de (x_1, x_2) en que se obtiene dicho mínimo, sujeto a las restricciones: $x_1 + x_2 \leq k;\ 5x_1 + 10x_2 \leq 200;\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80;\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$, si $k \in [80/3,\ +\infty)$.

Solución:

$k \geq 80/3 \Rightarrow$ La primera restricción se convierte en $x_1 + x_2 \leq 80/3$ y es superflua puesto que, no modifica el recinto definido por las otras restricciones.
La región factible es el polígono convexo de vértices $(0,0), (0,20), (40/3, 40/3), (20,0)$.
En dicha región, es evidente que, z alcanza el mínimo en $(0,0)$ y vale 0.

EJERCICIO 5.

Dado el problema de programación lineal cuyas restricciones son $x + 2y \geq 110$; $x + 4y \leq 160;\ x + y \leq 100;\ x + y \geq 0;\ x, y \geq 0$. Se pide determinar los vértices de la región de posibilidad.

Solución:

La región de posibilidad es el triángulo cuyos vértices son: $(60,25), (80,20), (90,10)$.

EJERCICIO 6.

Dado el problema de programación lineal: "Maximizar $f = -10x + 30y$, con las restricciones $-x + 2y \leq 0$, $y \leq 4000,\ x \geq 0,\ y \geq 0$". De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas si existen a) La región factible no es acotada y por tanto f no

alcanza máximo en ella. b) La región factible no es acotada, pero *f* tiene máximo en ella. c) La región factible es acotada y por tanto *f* alcanza un máximo en ella.

Solución:

Es cierta b). El máximo lo alcanza en (8000, 4000).

EJERCICIO 7.

En el problema de programación lineal: "Calcular el max de $z = 150.000x_1 + 300.000x_2$ con las restricciones: $5x_1 + 2x_2 \leq 40$; $2x_1 + 4x_2 \leq 40$; $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$", de entre las opciones siguientes, elíjanse las correctas, si existen: a) La región factible es el triángulo de vértices: $A(0,0)$, $B(0,10)$, $C(8,0)$. b) La función objetivo alcanza el máximo en más de un vértice. c) El máximo de la función objetivo es: 3×10^6

Solución:

La región factible es el polígono convexo de vértices: $A(0,0)$, $B(0,10)$, $C(5,{}^{15}\!/_{2})$, $D(8,0)$.

La función objetivo alcanza en ellos los siguientes valores: $z_A = 0$, $z_B = 3 \times 10^6$, $z_C = 3 \times 10^6$, $z_D = 1{,}2 \times 10^6$

El máximo se alcanza en los vértices B y C. Cuando esto ocurre, significa que, las curvas de nivel son paralelas al lado del polígono convexo que une esos dos vértices y por tanto tiene el mismo valor óptimo para todos los puntos del segmento.

EJERCICIO 8.

Se desea invertir no más de un millón de euros en acciones. Se acuerda invertir en X como máximo 600.000 euros, y al menos 200.000 euros en Y. Los beneficios de X serán el 10% y los de Y del 7%. Sabiendo que la inversión en X debe ser, al menos, tanto como en Y ¿Cómo debe efectuarse la inversión para maximizar los beneficios

anuales a) Plantéese el problema. b) Escríbase el sistema de ecuaciones lineales obtenido al introducir las variables de holgura que sean necesarias. c) ¿Cual es la solución óptima?

Solución:

	En X	En Y		
Inversión	x_1	x_2	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 1.000.000$	*Restricciones*
Limitaciones			$x_1 \leq 600.000$, $x_2 \geq 200.000$	*Restricciones*
Relación entre cantidades			$x_2 \leq x_1$	*Restricción*
Beneficios.	$0{,}10x_1$	$0{,}07\,x_2$	$z = 0{,}10x_1 + 0{,}07x_2$	*Función objetivo*

$x_1 + x_2 + x_3 = 1.000.000$

$x_1 + x_4 = 600.000$

$x_2 - x_5 = 200.000$

$x_2 - x_1 + x_6 = 0$

La función objetivo alcanza en los vértices los valores:

$z(200.10^3, 200.10^3) = 34.000$, $z(600.10^3, 200.10^3) = 74.000$,

$z(600.10^3, 400.10^3) = 88.000$, $z(500.10^3, 500.10^3) = 85.000$

El máximo se alcanza en el vértice (600,400)

EJERCICIO 9.

Dados los conjuntos: $I_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 25\right\}$, $I_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 25\right\}$, $I_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq 0, x - y \geq 0\right\}$, $I_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\right\}$. Elíjase la afirmación cierta de entre las siguientes: a) I_1 e I_4 son conjuntos convexos. b) I_2, I_3 e I_4 son conjuntos convexos. c) I_4, no es conjunto convexo.

Solución:

Un conjunto es convexo cuando para todo par de sus puntos el segmento que los une está incluido en dicho conjunto. $I_1 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 = 25\right\}$ es la circunferencia de radio 5 centrada en el origen, no es un conjunto convexo, ya que, si tomamos dos puntos cualesquiera, el segmento que los une es una cuerda que no está contenida en ella.

$I_2 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 25\right\}$ es el círculo de radio 5, y la cuerda que une cualquier pareja de puntos está contenida en dicho conjunto. Es decir es convexo.

$I_3 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / x + y \geq 0, x - y \geq 0\right\}$, es la intersección de dos semiplanos, luego es convexo.

$I_4 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / x = y\right\}$ es la bisectriz del 1º y 3ª cuadrante, También es convexo. Luego la solución válida es b)

EJERCICIO 10.

En el sistema de desigualdades $I_1 : x > 0$; $I_2 : y > 0$; $I_3 : x + y < 4$; $I_4 : 2x + y < 6$; $I_5 : x + 2y < 10$ hay alguna superflua. De entre las siguientes afirmaciones, elíjase la correcta: Son superfluas a) I_3 e I_4. b) I_3 e I_5. c) I_5.

Solución:

Una inecuación es superflua, cuando su omisión no produce modificación en el convexo de soluciones. Por tanto, si consideramos el convexo de soluciones: I_1; I_2; I_3; I_4; I_5. La inecuación superflua es I_5 (opción c).